ការសិក្សាអនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ

Study of Increasing and Decreasing Functions

ដោយ៖ លោក **យឹម អាយុទឡ្ហនៈវិជ្ជា**
ប្រធាននាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
នៃវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

១. សេចក្ដីផ្ដើម

យើងខ្ញុំសូមលើកយកអត្ថបទស្រាវជ្រាវមួយមកបង្ហាញអ្នកសិក្សា និង អ្នកស្រាវជ្រាវ គឺសិក្សាអំពីអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះ ដែលលោកអ្នកបានធ្លាប់រៀននៅមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិមកហើយ។ ក្នុងការសិក្សានេះ យើងលើកយកតែការបង្ហាញតាមនិយមន័យដើមនៃអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះប៉ុណ្ណោះ ដែលមិនទាក់ទងនឹងដេរីវេទេ។ ហេតុនេះគោលបំណងនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវ គឺចង់បង្ហាញពីនិយមន័យ លក្ខណៈ និង ការពង្រីកបន្ថែមនូវទ្រឹស្ដីនៃអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះ ដើម្បីជួយដល់សិស្សនិស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និង អ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងការសិក្សាលើជំនាញគណិតវិទ្យា ហើយជាឯកសារជំនួយសម្រាប់រៀននិងបង្រៀនផងដែរ។ តើអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះមាននិយមន័យដូចម្ដេច? តើលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះមានអ្វីខ្លះ? តើយើងអាចធ្វើការសិក្សាពង្រីកបន្ថែមអំពីលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះបានដែរឬទេ?

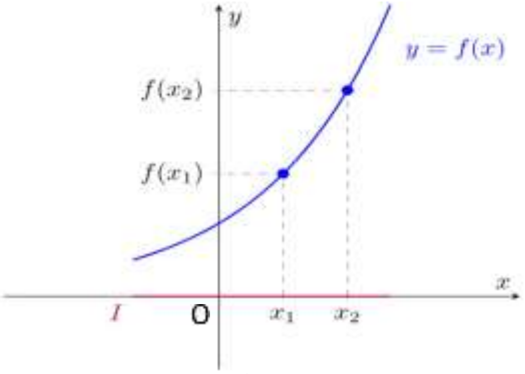
ជាដំបូង យើងសិក្សានិយមន័យនៃអនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍កើនដាច់ខាតជាមុន។

២. អនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ

និយមន័យទី១ [1]

- គេថា $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ I មួយ កាលណា
$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ។

- គេថា $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ឬកើនជានិច្ចនៅលើចន្លោះ I មួយ កាលណា
$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ។



រូបទី១៖ អនុគមន៍កើន $y = f(x)$

[1] https://mathworld.wolfram.com/IncreasingFunction.html

ឧទាហរណ៍ទី១

បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=6x^2$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathrm{I}_1=(0,+\infty)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

បង្ហាញថា អនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ I_1 ។

យើងមាន $f(x)=6x^2$, $\forall x\in \mathrm{I}_1$ ។

ចំពោះ $\forall x_1, x_2\in \mathrm{I}_1,\ x_1<x_2$ នាំឱ្យ

$x_1>0,\ x_2>0,\ x_2-x_1>0$

និង

$$f(x_2)-f(x_1)=6x_2^2-6x_1^2$$
$$=6(x_2^2-x_1^2)$$
$$=6(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0 \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $f(x_1)<f(x_2)$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ I_1 ។

ឧទាហរណ៍ទី២

បង្ហាញថា អនុគមន៍ $g(x)=3e^{2x}$ កើនជានិច្ចលើ $\mathrm{I}_2=\mathbb{R}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

បង្ហាញថា អនុគមន៍ g កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

យើងមាន $g(x)=3e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ចំពោះ $\forall x_1, x_2\in\mathbb{R}$ បើ $x_1<x_2$ នាំឱ្យ

$2x_1<2x_2$ ។

នាំឱ្យ $e^{2x_1}<e^{2x_2}$ និង $3e^{2x_1}<3e^{2x_2}$ ។

នាំឱ្យ $g(x_1)<g(x_2)$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ g កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

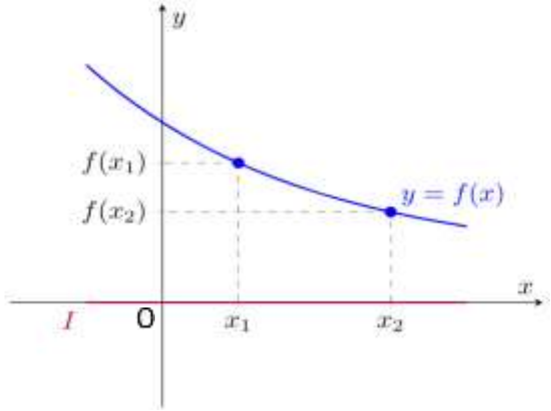
និយមន័យទី២ [2]

- គេថា $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ I មួយកាលណា

$\forall x_1, x_2\in \mathrm{I},\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ ។

- គេថា $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតឬចុះជានិច្ចនៅលើចន្លោះ I មួយ កាលណា

$\forall x_1, x_2\in \mathrm{I},\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ ។



រូបទី២៖ អនុគមន៍ចុះ $y=f(x)$

ឧទាហរណ៍ទី៣

បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=6x^2$ ចុះដាច់ខាតលើ $\mathrm{I}_3=(-\infty,0)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើ I_3 ។

យើងមាន $f(x)=6x^2$, $\forall x\in \mathrm{I}_3$ ។

ចំពោះ $\forall x_1, x_2\in \mathrm{I}_3,\ x_1<x_2$ នាំឱ្យ

$x_1<0,\ x_2<0,\ x_2-x_1>0$

និង

$$f(x_2)-f(x_1)=6x_2^2-6x_1^2$$
$$=6(x_2^2-x_1^2)$$
$$=6(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0 \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $f(x_1)>f(x_2)$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើ I_3 ។

ឧទាហរណ៍ទី៤

បង្ហាញថា អនុគមន៍ $g(x)=5e^{-3x}$ ចុះជានិច្ចលើ $\mathrm{I}_4=\mathbb{R}$ ។

[2] https://mathworld.wolfram.com/DecreasingFunction.html

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
បង្ហាញថា អនុគមន៍ g ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។
យើងមាន $g(x)=5e^{-3x}, \forall x\in\mathbb{R}$ ។
ចំពោះ $\forall x_1, x_2\in\mathbb{R}$ បើ $x_1<x_2$ នាំឱ្យ
$-3x_1>-3x_2$ ។
នាំឱ្យ $e^{-3x_1}>e^{-3x_2}$ និង $5e^{-3x_1}>5e^{-3x_2}$ ។
នាំឱ្យ $g(x_1)>g(x_2)$ ។
ដូចនេះ អនុគមន៍ g ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥

ដោយមិនប្រើដេរីវេ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=|x|$ កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ និងចុះជានិច្ចលើ $(-\infty,0)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
បង្ហាញថា អនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ និងចុះជានិច្ចលើ $(-\infty,0)$ ។
យើងមាន $f(x)=|x|$ ។
+ តាង $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ ដែល $x_1<x_2$ ។
នាំឱ្យ $0<x_1<x_2$ នាំឱ្យ $|x_1|<|x_2|$ នាំឱ្យ $f(x_1)<f(x_2)$ ។
នាំឱ្យ f កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ ។
+ តាង $x_1, x_2\in(-\infty,0)$ ដែល $x_1<x_2$ ។
នាំឱ្យ $x_1<x_2<0$ នាំឱ្យ $|x_1|>|x_2|$ នាំឱ្យ $f(x_1)>f(x_2)$ ។
នាំឱ្យ f ចុះជានិច្ចលើ $(-\infty,0)$ ។
ជាសរុបមក ដូចនេះ យើងបានអនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ និងចុះជានិច្ចលើ $(-\infty,0)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦

ដោយមិនប្រើដេរីវេ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $g(x)=a^x$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះ $a>1$ និងចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះ $0<a<1$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
បង្ហាញថា អនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះ $a>1$ និងចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះ $0<a<1$ ។
យើងមាន $g(x)=a^x$ ។
តាង $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ដែល $x_1<x_2$ ។
+ ចំពោះ $a>1$ និងដោយ $x_1<x_2$ នាំឱ្យ $x_2-x_1>0$ និង $a^{x_2-x_1}>1^{x_2-x_1}=1$ ។
នាំឱ្យ $\dfrac{a^{x_2}}{a^{x_1}}>1$ នាំឱ្យ $a^{x_1}<a^{x_2}$ ពីព្រោះ $a^{x_1}>0, \forall x_1\in\mathbb{R}$ ។ នាំឱ្យ $g(x_1)<g(x_2)$ ។
នាំឱ្យ g កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
+ ចំពោះ $0<a<1$ នាំឱ្យ $\dfrac{1}{a}>1$ និងដោយ $x_1<x_2$ នោះតាមលក្ខណៈខាងលើ នាំឱ្យ $(\dfrac{1}{a})^{x_1}<(\dfrac{1}{a})^{x_2}$ សមមូល $\dfrac{1}{a^{x_1}}<\dfrac{1}{a^{x_2}}$
នាំឱ្យ $a^{x_1}>a^{x_2}$ ពីព្រោះ $a^{x_1}>0, a^{x_2}>0, \forall x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ។ នាំឱ្យ $g(x_1)>g(x_2)$ ។
នាំឱ្យ g ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។
ជាសរុបមក ដូចនេះ យើងបានអនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះ $a>1$ និងចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះ $0<a<1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧

ដោយមិនប្រើដេរីវេ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=\log_a x$ កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ចំពោះ $a>1$ និងចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ចំពោះ $0<a<1$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
បង្ហាញថា អនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ចំពោះ $a>1$ និងចុះដាច់ខាតលើ

$(0,+\infty)$ ចំពោះ $0<a<1$ ។

យើងមាន $f(x)=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ ។

តាង $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ដែល $x_1<x_2$ ។

$+$ចំពោះ $a>1$ និងដោយ $x_1<x_2$ នាំឱ្យ $\ln a>\ln 1=0$ និង $\ln x_1<\ln x_2$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{\ln x_1}{\ln a}<\dfrac{\ln x_2}{\ln a}$ នាំឱ្យ $\log_a x_1<\log_a x_2$ ។ នាំឱ្យ $f(x_1)<f(x_2)$ ។

នាំឱ្យ f កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

$+$ចំពោះ $0<a<1$ និងដោយ $x_1<x_2$ នាំឱ្យ $\ln a<\ln 1=0$ និង $\ln x_1<\ln x_2$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{\ln x_1}{\ln a}>\dfrac{\ln x_2}{\ln a}$ នាំឱ្យ $\log_a x_1>\log_a x_2$ ។

នាំឱ្យ $f(x_1)>f(x_2)$ ។

នាំឱ្យ f ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

ជាសរុបមក ដូចនេះ យើងបានអនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ចំពោះ $a>1$ និងចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ចំពោះ $0<a<1$ ។

៣. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ

លក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះមានដូចតទៅ៖ [3]

១- បើអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះផលបូកនៃអនុគមន៍ $f+g$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

២- បើអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះផលបូកនៃអនុគមន៍ $f+g$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៣- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ផ្ទុយ $-f$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៤- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ផ្ទុយ $-f$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៥- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\dfrac{1}{f}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៦- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\dfrac{1}{f}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៧- បើអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ និង $f,g\geq 0$ នៅលើ I នោះផលគុណនៃអនុគមន៍ fg ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៨- បើអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ និង $f,g\geq 0$ នៅលើ I នោះផលគុណនៃអនុគមន៍ fg ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើកនេះ ។

៩- បើ $f:A\to B$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក A និង $g:B\to C$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក B នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $g\circ f:A\to C$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ A ។

១០- បើ $f:A\to B$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក A និង $g:B\to C$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក B នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $g\circ f:A\to C$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ A ។

[3] https://www.cuemath.com/calculus/increasing-and-decreasing-functions/

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈទី១ ទី៣ ទី៧ និងទី៩ដូចខាងក្រោម រីឯលក្ខណៈទី២ ទី៤ ទី៨និង ទី១០ ចាត់ទុកជាលំហាត់សម្រាប់អ្នកសិក្សា៖

១- ស្រាយថា $f+g$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I ។

ដោយ f និង g ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះតាមនិយមន័យ យើងបាន

ចំពោះ $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ បើ $x_1<x_2$ នោះ

$f(x_1) \leq f(x_2)$ និង $g(x_1) \leq g(x_2)$ ។

នាំឱ្យ $f(x_1)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_2)$

ឬ $(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2)$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យយើងបាន $f+g$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I ។

៣- ស្រាយថា $-f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I ។

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះ តាមនិយមន័យយើងបាន

ចំពោះ $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ បើ $x_1<x_2$ នោះ

$f(x_1) \leq f(x_2)$ ។

នាំឱ្យ $-f(x_1) \geq -f(x_2)$

ឬ $(-f)(x_1) \geq (-f)(x_2)$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យយើងបាន $-f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I ។

៧- ស្រាយថា fg ជាអនុគមន៍កើនលើ I ។

ដោយ f និង g ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះតាមនិយមន័យ យើងបាន

ចំពោះ $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ បើ $x_1<x_2$ នោះ

$f(x_1) \leq f(x_2)$ និង $g(x_1) \leq g(x_2)$ ។

ប៉ុន្តែ $f, g \geq 0$ នៅលើ I នាំឱ្យ

$0 \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ និង $0 \leq g(x_1) \leq g(x_2)$ ។

នាំឱ្យ $f(x_1) g(x_1) \leq f(x_2) g(x_2)$

ឬ $(fg)(x_1) \leq (fg)(x_2)$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យយើងបាន fg ជាអនុគមន៍កើនលើ I ។

៩- ស្រាយថា $g \circ f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ A ។

តាង $x_1, x_2 \in A$ ដែល $x_1<x_2$ ។ ដោយ $f: A \rightarrow B$ ជាអនុគមន៍កើនលើ A នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យ $f(x_1) \leq f(x_2)$ ។

ដោយ $g: B \rightarrow C$ ជាអនុគមន៍កើនលើ B ហើយ $f(x_1), f(x_2) \in B$ ដែល $f(x_1) \leq f(x_2)$

នាំឱ្យ $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ ។

នាំឱ្យ $(g \circ f)(x_1) \leq (g \circ f)(x_2)$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យយើងបាន $g \circ f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ A ។

ឧទាហរណ៍ទី៨

យើងមានអនុគមន៍ $f(x)=6 x^2$ និង $g(x)=3 e^{2 x}$ កើនលើ $\mathrm{I}=(0,+\infty)$ (តាមឧទាហរណ៍ទី១និងទី២)។ នោះតាមលក្ខណៈទី១ ទី៧និងទី៣ យើងទាញបាន

$(f+g)(x)=6 x^2+3 e^{2 x}$ និង

$(fg)(x)=18 x^2 e^{2 x}$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I

ហើយ $(-f)(x)=-6 x^2$ និង

$(-g)(x)=-3 e^{2 x}$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I ។

ចំពោះលក្ខណៈទី៥និងទី៦វិញ យើងខ្ញុំគិតថា ពួកវាជាបកាសន៍(សំណើ)មិនពិតទេ ជាឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $f(x)=x$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathrm{I}=(-3,3)$ នោះ $\frac{1}{f}$ ជាអនុគមន៍ចុះមិននៅលើចន្លោះបើកនេះទេ តែវាចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{J}=(-3,0) \cup(0,3)$ ។ យើងក៏មានឧទាហរណ៍ផ្សេងៗទៀតដែរ ដូចជាអនុគមន៍ $x^3, \ln x, \ldots$ ជាអនុគមន៍កើន ហើយពួកវាមិនផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខណៈទី៥និងទី៦ទេ។ យើងខ្ញុំនឹងកែតម្រូវនូវលក្ខណៈទាំងពីរនេះក្នុងផ្នែកទី៤ខាងក្រោម។

៤. ការសិក្សាពង្រីកលក្ខណៈ

យើងខ្ញុំធ្វើការសិក្សាពង្រីកនិងកែតម្រូវលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ ហើយបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីមួយចំនួនមានដូចតទៅ៖

១- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $f+k$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើកនេះ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{R}$ ។

២- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $f+k$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើកនេះ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{R}$ ។

៣- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\alpha f+k$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha>0, k\in\mathbb{R}$ និង វាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha<0, k\in\mathbb{R}$ ។

៤- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\alpha f+k$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha>0, k\in\mathbb{R}$ និង វាជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha<0, k\in\mathbb{R}$ ។

៥- បើ $f:A\to B$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក A និង $g:B\to C$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក B នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $g\circ f:A\to C$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ A ។

៦- បើ $f:A\to B$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក A និង $g:B\to C$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក B នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $g\circ f:A\to C$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ A ។

៧- បើអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\alpha f+\beta g$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha\ge 0, \beta>0$ និង វាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha\le 0, \beta<0$ ។

៨- បើអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\alpha f+\beta g$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha\ge 0, \beta>0$ និង វាជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha\le 0, \beta<0$ ។

៩- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\dfrac{1}{f}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{J}=\mathrm{I}\setminus\mathrm{A}$ ដែល $\mathrm{A}=\{x\in\mathrm{I}: f(x)=0\}$ ។

១០- បើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\dfrac{1}{f}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{J}=\mathrm{I}\setminus\mathrm{A}$ ដែល $\mathrm{A}=\{x\in\mathrm{I}: f(x)=0\}$ ។

១១- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $a^{f(x)}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\mathrm{a}>1$ និងវាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $0<\mathrm{a}<1$ ។

១២- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $a^{f(x)}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\mathrm{a}>1$ និងវាជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $0<\mathrm{a}<1$ ។

១៣- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$ និង $f>0$ នៅលើ I នោះអនុគមន៍ $\log_a f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\mathrm{a}>1$ និងវាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $0<\mathrm{a}<1$ ។

១៤- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ និង $f>0$ នៅលើ I នោះអនុគមន៍ $\log_a f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\mathrm{a}>1$ និងវាជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $0<\mathrm{a}<1$ ។

១៥- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $[f(x)]^{2m-1}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $m\in\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$ ។

១៦- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $[f(x)]^{2m-1}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $m\in\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$ ។

១៧- បើអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\alpha[f(x)]^{2m-1}+\beta[g(x)]^{2n-1}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha\geq 0, \beta>0,$ $m\in\mathbb{N}$ និង $n\in\mathbb{N}$ ហើយវាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha\leq 0, \beta<0, m\in\mathbb{N}$ និង $n\in\mathbb{N}$ ។

១៨- បើអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\alpha[f(x)]^{2m-1}+\beta[g(x)]^{2n-1}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha\geq 0, \beta>0,$ $m\in\mathbb{N}$ និង $n\in\mathbb{N}$ ហើយវាជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha\leq 0, \beta<0, m\in\mathbb{N}$ និង $n\in\mathbb{N}$ ។

១៩- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ និង $f>0$ នៅលើ I នោះអនុគមន៍ $\sqrt{[f(x)]^{2m-1}}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $m\in\mathbb{N}$ ។

២០- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\sqrt[3]{[f(x)]^{2m-1}}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $m\in\mathbb{N}$ ។

២១- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\sqrt[3]{[f(x)]^{2m-1}}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $m\in\mathbb{N}$ ។

២២- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\sqrt[n]{[f(x)]^{2m-1}}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $m, n\in\mathbb{N}$ និង n ជាចំនួនគត់សេស។

២៣- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះអនុគមន៍ $\sqrt[n]{[f(x)]^{2m-1}}$ ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $m, n\in\mathbb{N}$ និង n ជាចំនួនគត់សេស។

២៤- បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះបើក $\mathrm{I}=(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ និង $f>0$ នៅលើ I នោះអនុគមន៍ $\sqrt[n]{[f(x)]^{2m-1}}$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $m, n\in\mathbb{N}$ និង n ជាចំនួនគត់គូ។

សម្គាល់

លក្ខណៈទី១ដល់ទី៦ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី៧ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤ និង បានផុសនូវលក្ខណៈទី៥ និងទី៦ក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំ(ឈ្មោះ អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ឃឹម)នៅថ្ងៃទី៨ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤ ។ លក្ខណៈទី៧ ទី៨ ទី៩និងទី១០ ខ្ញុំបានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី១១ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤ និង បានផុសតែលក្ខណៈទី៩និងទី១០ប៉ុណ្ណោះ ក្នុងហ្វេសបុករបស់ខ្ញុំនៅថ្ងៃទី១១ ខែ

មីនា ឆ្នាំ២០២៤ ។ ចំពោះលក្ខណៈទី១១ដល់ទី១៦ បានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី២៧ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤។ រីឯលក្ខណៈទី១៧ដល់ទី២៤ បានរៀបរៀងនៅថ្ងៃទី២៩ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤។
យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈទី៥និងទី៧ ដូចខាងក្រោម រីឯលក្ខណៈផ្សេងទៀតចាត់ទុកជាលំហាត់សម្រាប់អ្នកសិក្សា៖

៥- ស្រាយថា $g\circ f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ A ។
តាង $x_1, x_2 \in A$ ដែល $x_1 < x_2$ ។ ដោយ $f: A \to B$ ជាអនុគមន៍កើនលើ A នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យ $f(x_1) \le f(x_2)$ ។
ដោយ $g: B \to C$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ B ហើយ $f(x_1), f(x_2) \in B$ ដែល $f(x_1) \le f(x_2)$
នាំឱ្យ $g(f(x_1)) \ge g(f(x_2))$ ។
នាំឱ្យ $(g\circ f)(x_1) \ge (g\circ f)(x_2)$ ។
ដូចនេះ តាមនិយមន័យយើងបាន $g\circ f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ A ។

៧- ស្រាយថា $\alpha f + \beta g$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha \ge 0, \beta > 0$ និង វាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha \le 0, \beta < 0$ ។
តាង $x_1, x_2 \in \mathrm{I} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ ដែល $x_1 < x_2$ ។
ដោយ f និង g ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathrm{I} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ នោះតាមនិយមន័យ នាំឱ្យ
$f(x_1) \le f(x_2)$ និង $g(x_1) \le g(x_2)$ ។
– ចំពោះ $\alpha \ge 0, \beta > 0$ នាំឱ្យ
$\alpha f(x_1) \le \alpha f(x_2)$ និង $\beta g(x_1) \le \beta g(x_2)$ ។
នាំឱ្យ $\alpha f(x_1) + \beta g(x_1) \le \alpha f(x_2) + \beta g(x_2)$
ឬ $(\alpha f + \beta g)(x_1) \le (\alpha f + \beta g)(x_2)$ ។
តាមនិយមន័យយើងបាន $\alpha f + \beta g$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I ។
– ចំពោះ $\alpha \le 0, \beta < 0$ នាំឱ្យ
$\alpha f(x_1) \ge \alpha f(x_2)$ និង $\beta g(x_1) \ge \beta g(x_2)$ ។
នាំឱ្យ $\alpha f(x_1) + \beta g(x_1) \ge \alpha f(x_2) + \beta g(x_2)$
ឬ $(\alpha f + \beta g)(x_1) \ge (\alpha f + \beta g)(x_2)$ ។
តាមនិយមន័យយើងបាន $\alpha f + \beta g$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I ។
ជាសរុបមក ដូចនេះ $\alpha f + \beta g$ ជាអនុគមន៍កើននៅលើ I ចំពោះ $\alpha \ge 0, \beta > 0$ និងវាជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ I ចំពោះ $\alpha \le 0, \beta < 0$ ។

សរុបមក អត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ នឹងផ្តល់នូវចំណេះដឹងអំពីនិយមន័យនិងលក្ខណៈចំនួន១០នៃអនុគមន៍កើននិងអនុគមន៍ចុះ លក្ខណៈ សម្រាយបញ្ជាក់និងដំណោះស្រាយនូវឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ ជាពិសេស យើងខ្ញុំសិក្សាពង្រីកបន្ថែមលក្ខណៈបានចំនួន ២៤ ដូចបង្ហាញក្នុងផ្នែកទី៤ ដើម្បីចូលរួមចំណែកក្នុងការអភិវឌ្ឍចំណេះដឹងខាងផ្នែកទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាលើវិស័យអប់រំ។ ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា អត្ថបទនេះ ជាឯកសារជំនួយមួយសម្រាប់រៀនឬបង្រៀន ដើម្បីជួយដល់ សិស្ស និស្សិត អ្នកស្រាវជ្រាវ លោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូ ក្នុងការសិក្សា ការបង្រៀន ឬ ការស្រាវជ្រាវទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យានៅកម្រិតមធ្យមសិក្សានិងឧត្តមសិក្សា។

ឯកសារពិគ្រោះ

ភាសាខ្មែរ

-ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា(២០០៩) សៀវភៅ « គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន » ការផ្សាយរបស់ គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ ភ្នំពេញ។

-ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា(២០០៩) សៀវភៅ « គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១ កម្រិតខ្ពស់ » ការផ្សាយរបស់ គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ ភ្នំពេញ។

គេហទំព័រ

https://mathworld.wolfram.com/Increasing Function.html

https://mathworld.wolfram.com/Decreasing Function.html

https://www.cuemath.com/calculus/increasing-and-decreasing-functions/

https://www.geeksforgeeks.org/increasing-and-decreasing-functions/

https://www.mathsisfun.com/sets/functions-increasing.html

https://ximera.osu.edu/math/calc1Book/calcBook/incDec/incDec

https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/SeniorTopic3/3c/3c_2content_1.html

https://byjus.com/jee/increasing-and-decreasing-functions-in-calculus/

https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Calculus_3e_(Apex)/03%3A_The_Graphical_Behavior_of_Functions/3.03%3A_Increasing_and_Decreasing_Functions

https://data.testprepkart.com/Online_Preparation/JEE/JEE%20Maths/8_JEE_Maths_Application%20of%20Derivatives/2_JEE%20Maths_Application%20of%20Derivatives_Increasing%20&%20Decreasing%20Functions.pdf

https://unacademy.com/content/cbse-class-12/study-material/mathematics/increasing-and-decreasing-functions/